確率・統計（電子２年）　　第９講

- 様々な分布の期待値と分散，共分散と相関係数
- 有限マルコフ連鎖（のさわり）

前回復習

練習１：独立な確率変数 X, Y があり，共に実数区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う場合の，差の絶対値（つまり確率変数 $|X-Y|$）の「期待値」を計算せよ．

X や Y の密度：$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ であり，独立なので，(X, Y) の結合密度関数：$\phi(x,y) = f(x) \cdot f(y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

そこで，$|X-Y|$ は X と Y の関数であり，確率変数の関数の期待値の一般的方法で計算できる．

$$
\begin{aligned}
E[|X-Y|] &= \int\int |x-y|\phi(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x-y|dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_y^1 (x-y)dx + \int_0^y (y-x)dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{x^2}{2} - yx \right]_{x=y}^1 + \left[yx - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^y \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - y + y^2 \right) dy = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

別解： $X + (-Y)$ という独立な確率変数の和の密度関数を畳み込み積分によって求めて，それを元に $|X-Y|$ の期待値を計算することもできる．

$(-Y)$ の密度：$g(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ より，まず，$X - Y = X + (-Y)$ の密度関数は，$(-1 \leq x \leq 1)$ において，

$$
\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{0 \leq x-y \leq 1, -1 \leq y \leq 0} 1\, dy \\
&= \int_{\max(-1,x-1)}^{\min(0,x)} 1\, dy = [y]_{\max(-1,x-1)}^{\min(0,x)} = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで，連続型確率変数 Z の密度関数が $z(x)$ の時，その絶対値 $|Z|$ の密度関数は $z(x) + z(-x)$ $(0 \leq x)$ となる（第７講「確率変数の関数」の先頭辺参照）ので，絶対値 $|X-Y|$ の密度関数 $h(x)$ は，

$$
h(x) = (-x+1) + ((-x)+1) = 2(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1)
$$

よって，絶対値 $|X-Y|$ の期待値 $E[|X-Y|]$

$$
= \int_0^{\infty} xh(x)dx = \int_0^1 2x(1-x)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}
$$

練習２（小レポート課題３）：独立な確率変数 X, Y があり，共に実数区間 $[1,2]$ 上の一様分布に従う場合の，確率変数 $\dfrac{X}{Y}$ の「期待値」と「分散」を計算せよ．

X や Y の密度関数は $f_1(x) = \begin{cases} 1 & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ であり，かつ，X と Y は独立なので，(X,Y) の結合密度関数は，２つの密度関数の積になり，

$$f(x,y) = f_1(x)f_1(y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in [1,2]\times[1,2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

２確率変数 X, Y の結合密度関数を $f(x,y)$ とする時，２変数関数 h による合成確率変数 $h(X,Y)$ の期待値は，$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$ なので，

$$E[\frac{X}{Y}] = \int_1^2\int_1^2 \frac{x}{y}\cdot 1\,dxdy = \left(\int_1^2 xdx\right)\left(\int_1^2 \frac{1}{y}dy\right) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 [\log y]_1^2 = \frac{3}{2}\log 2$$

$$E[\frac{X^2}{Y^2}] = \int_1^2\int_1^2 \frac{x^2}{y^2}\cdot 1\,dxdy = \left(\int_1^2 x^2dx\right)\left(\int_1^2 \frac{1}{y^2}dy\right) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 \left[-\frac{1}{y}\right]_1^2 = \frac{7}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$V[\frac{X}{Y}] = E[\frac{X^2}{Y^2}] - (E[\frac{X}{Y}])^2 = \frac{7}{6} - \frac{9}{4}(\log 2)^2$$

12. 様々な分布の期待値／分散（参考書２．X．２）

- **二項分布** $\boxed{E[X] = np; \quad V[X] = np(1-p)}$（パラメタ n, p，n は自然数，$0 < p < 1$）．X：表が出る確率 p のコインを互いに独立に n 回投げて表が出る回数．$\Pr[X = k] = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$.

$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$ を計算．天下りに，$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x + (1-p))^n$ と置き，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+(1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k (1-p)^{n-k} \\ f'(x) &= n(x+(1-p))^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k x^{k-1}(1-p)^{n-k} \\ f''(x) &= n(n-1)(x+(1-p))^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,{}_nC_k x^{k-2}(1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

$f'(x)$ に $x = p$ を代入すると，$n = f'(p) = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k p^{k-1}(1-p)^{n-k} = \dfrac{E[X]}{p}$ より，

$$E[X] = np$$

同様に，$n(n-1) = f''(p) = \dfrac{E[X(X-1)]}{p^2} = \dfrac{E[X^2]-np}{p^2}$ より，

$$V[X] = E[X^2] - (np)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

別解：確率変数 H_i を，i 回目のコインが表なら 1，裏なら 0 とし，$X = \sum_{i=1}^{n} H_i$ より，$E[H_i] = 1 \times p = p$; $V[H_i] = E[H_i^2] - (E[H_i])^2 = p - p^2 = p(1-p)$ なので，

$$E[X] = E[\sum_{i=1}^{n} H_i] = nE[H_i] = np; \quad V[X] = V[\sum_{i=1}^{n} H_i] = nV[H_i] = np(1-p)$$

- **ポアソン (Poisson) 分布** $\boxed{E[X] = \lambda;\ V[X] = \lambda}$ （パラメタ $\lambda > 0$）.
  X：ある都市で 1 日に発生する交通事故の回数．$\Pr[X=k] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda \\
E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2 \\
V[X] &= E[X(X-1)] + E[X](1-E[X]) = \lambda^2 + \lambda(1-\lambda) = \lambda
\end{aligned}$$

- **幾何分布** $\boxed{E[X] = \dfrac{1-p}{p};\ V[X] = \dfrac{1-p}{p^2}}$ （パラメタ $p; 0 < p < 1$）.
  X：表が出る確率が p のコインを独立に投げ続け，初めて表が出るまでに出る裏の回数．$\Pr[X=k] = (1-p)^k p$.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=1}^{\infty}(1-F(k-1)) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\sum_{j=0}^{k-1}(1-p)^j p) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = \frac{1-p}{p} \\
E[X(X-1)] &= \sum_{k=1}^{\infty}2k(1-F(k)) = \sum_{k=1}^{\infty}2k(1-\sum_{j=0}^{k}(1-p)^j p) = \sum_{k=1}^{\infty}2k(1-p)^{k+1} \\
&= \frac{2(1-p)^2}{p^2} \\
V[X] &= E[X(X-1)] + E[X](1-E[X]) \\
&= \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

- 区間 $[a,b]$ 上の**一様分布** $\boxed{E[X] = \dfrac{a+b}{2};\ V[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}}$

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_{x=a}^{b} = \frac{a+b}{2}$$

$$
\begin{aligned}
V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

- **指数分布** $\boxed{E[X] = \frac{1}{\lambda};\ V[X] = \frac{1}{\lambda^2}}$ （パラメタ $\lambda > 0$）

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \Big[x(-e^{-\lambda x})\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda x})dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda} \\
V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \Big[x^2(-e^{-\lambda x})\Big]_0^\infty - 2\int_0^\infty x(-e^{-\lambda x})dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

- **アーラン (Erlang 分布)** $\boxed{E[X] = \frac{1}{\lambda};\ V[X] = \frac{1}{\lambda^2 k}}$ （パラメタ $k, \lambda > 0$, k は自然数）

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{(\lambda k)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty x^k e^{-\lambda k x}dx = \frac{(\lambda k)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty \frac{y^k}{(\lambda k)^k}e^{-y}\frac{1}{\lambda k}dy \\
&= \frac{\Gamma(k+1)}{(k-1)!\lambda k} = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

ただし, $y = \lambda k x$ と置き, $\Gamma(k+1) = k!$ を用いた

$$
\begin{aligned}
V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{(\lambda k)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty x^{k+1}e^{-\lambda k x}dx - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{(\lambda k)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty \frac{y^{k+1}}{(\lambda k)^{k+1}}e^{-y}\frac{1}{\lambda k}dy - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{(k+1)!}{(\lambda k)^2(k-1)!} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2 k}
\end{aligned}
$$

別解：「互いに独立でパラメタ $k * \lambda$ の指数分布に従うような k 個の異なるランダムな確率変数（$T_1, T_2, \ldots, T_k$）の和」の分布になることを利用するなら，前項の結果を使って簡単に導ける.

$$
E[X] = \sum_{j=1}^k E[T_j] = k \times \frac{1}{\lambda k} = \frac{1}{\lambda};\quad V[X] = \sum_{j=1}^k V[T_j] = k \times \frac{1}{(\lambda k)^2} = \frac{1}{\lambda^2 k}
$$

- （１次元）**正規分布** $\boxed{E[X] = \mu;\ V[X] = \sigma^2}$ （パラメタ μ, σ，$\sigma > 0$）

$x = \sigma y + \mu \leftrightarrow y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ と変数変換して,

$$
E[X] = \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sigma y + \mu}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})dy
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma y}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2})dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2})dy = 0 + \mu = \mu \\
V[X] &= E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma y)^2}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2})dy = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2})dy \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y}{\sqrt{2\pi}} (\exp(-\frac{y^2}{2}))' dy = 0 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2})dy = \sigma^2
\end{aligned}
$$

13. 共分散，相関係数（参考書３．２）

- **共分散**： $Cov[X,Y] \stackrel{\text{def}}{=} E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \qquad (E[X^2], E[Y^2] < \infty)$
  - $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y], \quad Cov[X,X] = V[X],$
  - 「X と Y が独立」 $\Rightarrow$ 「$Cov[X,Y] = 0$」，逆は成り立たない.
- **相関係数**： $\rho[X,Y] \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}} = \dfrac{E[(X-E[X])(Y-E[Y])]}{\sqrt{E[(X-E[X])^2]E[(Y-E[Y])^2]}}$，ただし，$E[X^2], E[Y^2] < \infty$, $V[X], V[Y] \neq 0$
  $\rho[X,Y] = \rho[aX,bY]$ なのでスケール（単位）に非依存.
  - $\dfrac{Cov[aX,bY]}{\sqrt{V[aX]V[bY]}} = \dfrac{E[abXY] - E[aX]E[bY]}{\sqrt{a^2b^2V[X]V[Y]}} = \dfrac{abCov[X,Y]}{ab\sqrt{V[X]V[Y]}}$
- ２つの確率変数 X,Y の共分散（相関係数）が正，0，負の場合，各々「X,Y は正相関，無相関，負相関を持つ」と言う.
  - ２つの**確率変数**の「独立」(結合分布＝周辺分布の積）は「無相関」($E[XY] = E[X]E[Y]$）より強い概念である.
    例：X が期待値 0 分散 1 の正規分布に従い，$Y = X^2$ の場合,
    X と Y は独立ではないが, $Cov[X,Y] = E[X^3] - E[X]E[X^2] = 0 - 0 = 0.$

期待値とシュワルツの不等式（コーシー＆シュワルツの不等式）

$E[X^2], E[Y^2] < \infty$ なる任意の確率変数 X,Y に対して,

$$|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

等号が成り立つのは,

- $E[X^2], E[Y^2] > 0$ の場合，$E[(X-tY)^2]=0$ となる実数 $t\ (\neq 0)$ が存在する場合のみであり，ほとんど全ての ω において,「$X(\omega)=tY(\omega)$」の時である（$P(\{\omega|X(\omega)=tY(\omega)\})=1$）．よって，$E[XY]=tE[Y^2]$ となり，

$$E[XY]=\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}>0 \Leftrightarrow t=\frac{E[XY]}{E[Y^2]}>0 \quad \text{（t は正）}$$

$$E[XY]=-\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}<0 \Leftrightarrow t=\frac{E[XY]}{E[Y^2]}<0 \quad \text{（t は負）}$$

- $E[X^2]=0$ の場合，ほとんど全ての ω において,「$X(\omega)=0$」で，シュワルツの不等式の両辺とも 0 になり自明である．$E[Y^2]=0$ の場合も同様.

シュワルツの不等式は，内積を持つベクトル空間の一般的な性質であり，ベクトル X, Y に対し，２ベクトルの内積を $<X, Y>$，その内積から導かれるベクトルの大きさを $||X||, ||Y||$ と書くと，$|<X,Y>| \leq ||X|| \cdot ||Y||$ を意味する．

今回の期待値の場合，$E[XY]$ が確率変数 X, Y の内積としての性質を満たすことの帰結である．証明は線形代数や応用解析学などの講義資料参照.

例題

２つの確率変数 $X,\ Y$ の**相関係数** $\rho[X,Y]=\dfrac{E[(X-E[X])(Y-E[Y])]}{\sqrt{E[(X-E[X])^2]E[(Y-E[Y])^2]}}$（ただし，$E[X^2], E[Y^2]<\infty$，$E[(X-E[X])^2], E[(Y-E[Y])^2]\neq 0$）を考える．

１＞ $\rho[X,Y]$ の絶対値は 1 以下であることを示せ.

２＞ $\rho[X,Y]$ が 1 になる場合，-1 になる場合の各々の，X, Y の関係は？

$0<E[A^2], E[B^2]<\infty$ なる任意の確率変数 A, B に対してシュワルツの不等式（前述）より

$$|E[AB]| \leq \left(E[A^2]\right)^{\frac{1}{2}} \left(E[B^2]\right)^{\frac{1}{2}}$$

となり，等号が成り立つのは，ほとんど全ての ω において,「$A(\omega)=tB(\omega)$」の時である．また，この時は，$E[AB]=tE[B^2]$ となる．

これに，$A(\omega)=X(\omega)-E[X],\ B(\omega)=Y(\omega)-E[Y]$ を適用すれば，

$$|E[(X-E[X])(Y-E[Y])]| \ \leq\ \sqrt{E[(X-E[X])^2]E[(Y-E[Y])^2]}$$

等号が成り立つのは，ほとんど全ての ω において，

$$A(\omega)=\frac{E[AB]}{E[B^2]}B(\omega) \Leftrightarrow X(\omega)-\frac{Cov[X,Y]}{V[Y]}Y(\omega)=E[X]-\frac{Cov[X,Y]}{V[Y]}E[Y]$$

が成り立つ場合であり（最右辺は ω によらず，定数 D と置けることに注意），

- $|\rho[X,Y]| = \dfrac{(E[(X-E[X])(Y-E[Y])])^2}{\sqrt{E[(X-E[X])^2]E[(Y-E[Y])^2]}} \leq 1$
- $|\rho[X,Y]| = 1$ の場合，(X,Y) の観測値を x-y 平面にプロットすると，確率 1 で，直線 $y = \dfrac{V[Y]}{Cov[X,Y]}x + D$ 上に乗る．
  - $\rho[X,Y] = 1$ の時は（$Cov[X,Y] > 0$ なので），右上がりの直線．
  - $\rho[X,Y] = -1$ の時は（$Cov[X,Y] < 0$ なので），右下がりの直線．

14. 有限マルコフ連鎖（のさわり）

有限個の状態と，それらの中の各 2 状態（今と次）間の遷移確率によって振舞いが規定されるシステム（**過去（２つ以上前）の状態に依存しない**）を**有限マルコフ連鎖**と呼ぶ．特に，遷移確率が，時刻あるいは**何回目の遷移か（離散時間の場合）**によらず，遷移前の状態と遷移後の状態だけで決まるものを**斉時型**と呼ぶ．この時，任意の 2 状態間の遷移確率は「**定常遷移確率行列**」で表せる．マルコフ連鎖は，現実の問題に頻繁に現れ，**確率過程**（後述）として扱う．

斉時型離散時間有限マルコフ連鎖の例としての単純双六

最も簡単な例として，場所が 3 つ（左から S_1, S_2, S_3）しかない双六を考える．左端 S_1 がスタート，右端 S_3 がゴールとし，正常なサイコロを振って出た目を歩数としてコマを進める（よって可能な歩数は 1 ～ 6 の 6 通り）．コマは一歩で隣の場所へ移動する．S_3 地点でちょうど止ったら「上がり」として終了する．S_1 または S_2 地点でサイコロを振った時，まず右に進むが，S_3 に達しても歩数が余っていたらそのまま折り返して左に進む．また，そのように折り返した場合に S_1 まで戻ってもまだ歩数が余っていたらさらに折り返して再度右に進む．

＜１＞ 上がるまでにサイコロを振る回数 Z の確率関数を求めよ．

＜２＞ Z の期待値と標準偏差を求めよ．

S_i に居るコマが次ステップで S_j に進む確率を q_{ij} と置く．今何ステップ目かに依存しないので,「斉時型」である．S_3 に進んだらゲームは終わり，また，$q_{i3} = 1 - (q_{i1} + q_{i2})\ (i = 1, 2)$．見易さのために，$S_3$ を省き，S_1, S_2 間の遷移を調べる．

$$\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (q_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

を**定常遷移確率行列**と呼ぶ．S_1 から出発したコマが n ステップ目に居る場所（状態 S_j の**番号** j）を X_n と置くと，$q_{ij} = \Pr[X_n = j | X_{n-1} = i]$ であるので，

$$\pi_j^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \Pr[X_n = j] = \sum_{i=1,2} \Pr[X_n = j, X_{n-1} = i] = \sum_{i=1,2} \Pr[X_{n-1} = i] q_{ij}$$

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}) = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\mathbf{Q} = \boldsymbol{\pi}^{(n-2)}\mathbf{Q^2} = \cdots = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\mathbf{Q^n}$$

これを漸化式と見て解く（大学入試問題の場合）と,

- $\pi_1^{(n+1)} = \frac{1}{6}\pi_1^{(n)} + \frac{1}{6}\pi_2^{(n)}$, $\pi_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}\pi_1^{(n)} + \frac{1}{2}\pi_2^{(n)}$, $\boldsymbol{\pi}^{(0)} = (1, 0)$. よって, $n = 1, 2, \ldots$ で, $(\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}) = (\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1})$.

一方, より一般的に（マルコフ連鎖の）定常遷移確率行列 $\mathbf{Q}$ を用いて, $\mathbf{Q^n}$ を計算して解くことができる.

- $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}^n = \cdots = \begin{pmatrix} a(a+b)^{n-1} & b(a+b)^{n-1} \\ a(a+b)^{n-1} & b(a+b)^{n-1} \end{pmatrix}$ より,

  $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\mathbf{Q} = \cdots = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\mathbf{Q^n} = (1, 0)\mathbf{Q^n} = (\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1})$

元の問題に戻って,

1＞ $Z = n$ となる確率 z_n（「n ステップ目で上がる＝初めて S_3 に行く」確率）は, $(n-1)$ ステップで S_1 に居る場合と S_2 に居る場合に分けられるので,

$$\begin{aligned}
z_n &\stackrel{\text{def}}{=} \Pr[Z = n] = \Pr[X_n = 3, X_{n-1} = 1] + \Pr[X_n = 3, X_{n-1} = 2] \\
&= \Pr[X_{n-1} = 1]\Pr[X_n = 3 | X_{n-1} = 1] + \Pr[X_{n-1} = 2]\Pr[X_n = 3 | X_{n-1} = 2] \\
&= \pi_1^{(n-1)}(1 - q_{11} - q_{12}) + \pi_2^{(n-1)}(1 - q_{21} - q_{22}) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

2＞ 期待値：$E[Z] = \sum_{n=1}^{\infty} n z_n = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \cdots = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{3} = 3$

一方, 分散（標準偏差）は,

$$\begin{aligned}
E[Z(Z-1)] &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z_n = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \cdots \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-3} = 12 \qquad \text{より,} \\
V[Z] &= E[Z(Z-1)] + E[Z](1 - E[Z]) = 12 + 3(-2) = 6
\end{aligned}$$

よって, 標準偏差：$\sqrt{6}$.

あるいは, $Z' = Z - 1$ と置くと $\Pr[Z' = k] = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ なので, Z' は $p = \frac{1}{3}$ の幾何分布に従うことがわかる. よって本講前半の結果より,

- $E[Z] = 1 + E[Z'] = 1 + \frac{1-p}{p} = 1 + \frac{2/3}{1/3} = 3$
- $V[Z] = V[Z'] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{2/3}{(1/3)^2} = 6$

オンライン付録

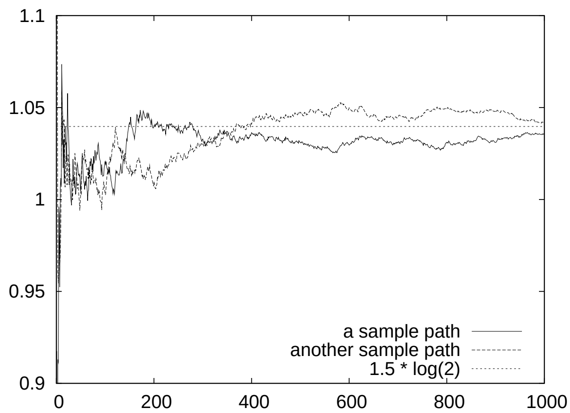
A-1. X/Y の期待値（前回復習の補足）

乱数 X, Y は，互いに「独立」で，どちらも実数区間 $[1,2]$ の範囲から無作為に１つの「実数」を出力する．一回の実験で X と Y の値を各々一個出力し，i 回目の実験での出力値を X_i, Y_i と置く．実験を繰り返すとして，X_i と Y_i の比の n 回分の算術平均：$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{Y_i}$ という値は，n の増加に伴い，

- いつかは，$\dfrac{X}{Y}$ の「期待値」$= \dfrac{3}{2}\log 2 =$ 約 $1.035\ldots$ に収束する．

これは，プログラムで実験的に確認できる．図は，以下の C プログラムを使って，２つの異なる「1000 回繰り返す実験」を行ってみた結果である（x 軸は繰り返し回数 n，y 軸は実際の $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{Y_i}$ の値）．自分で，擬似乱数の初期値を変えていろいろ試して（実験して）みても，やはり 1.035 付近に近づくことが体験できる「はず」である．

```
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <time.h>
main() {
  int i;  double x, y, s;
  srand48(time(NULL));  s = 0.0;
  for (i=1;i<=1000;i++) {
    x = drand48();  y = drand48(); s += (1.0 + x)/(1.0 + y);
    printf("%d %f\n", i, s/i);
  }}
```



A-2. 分布・補分布による共分散の表現

２つの確率変数 X, Y の結合密度関数を $f(x,y)$ とし，指示関数 $I(a,b)=1\ (a \geq b),\ =0\ (a<b)$ を使うと，$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]$ なので，

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_{R^2} xyf(x,y)\,dxdy = \int_0^\infty\int_0^\infty xyf(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^0\int_0^\infty xyf(x,y)dxdy \\
&\quad + \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 xyf(x,y)dxdy + \int_0^\infty\int_{-\infty}^0 xyf(x,y)dxdy \\
&= E_1+E_2+E_3+E_4 \\
E_1 &= \int_0^\infty\int_0^\infty xyf(x,y)dxdy = \int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_0^\infty I(x,z)dz\right)\left(\int_0^\infty I(y,w)dw\right)f(x,y)dxdy \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_z^\infty\int_w^\infty f(x,y)dydx\right)dwdz
\end{aligned}$$

ここで，結合分布 $F(x,y)$，周辺分布 $F_X(x), F_Y(y)$：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f(s,t)dtds,\ F_X(x)=F(x,\infty),\ F_Y(y)=F(\infty,y)$$

を使って書きなおすと，$F(\infty,\infty)=1$ より，

$$E_1 = \int_0^\infty\int_0^\infty (1-F_X(z)-F_Y(w)+F(z,w))\,dwdz$$

E_2, E_3, E_4 も同様に， $E_2 = \int_0^\infty\int_0^\infty (-F_X(-z)+F(-z,w))\,dwdz,$

$$E_3 = \int_0^\infty\int_0^\infty F(-z,-w)dwdz,\ E_4 = \int_0^\infty\int_0^\infty (-F_Y(-w)+F(z,-w))\,dwdz$$

よって，

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^\infty\int_0^\infty ((1-F_X(z)-F_Y(w)+F(z,w))-(F_X(-z)-F(-z,w)) \\
&\quad + F(-z,-w)-(F_Y(-w)-F(z,-w)))\,dwdz
\end{aligned}$$

一方，$E[X]=\int_0^\infty (1-F_X(z)-F_X(-z))\,dz$ を使うと，

$$\begin{aligned}
E[X]E[Y] &= \int_0^\infty (1-F_X(z)-F_X(-z))\,dz \times \int_0^\infty (1-F_Y(w)-F_Y(-w))\,dw \\
&= \left(\int_0^\infty (1-F_X(z))dz\right)\left(\int_0^\infty (1-F_Y(w))dw\right) \\
&\quad - \left(\int_0^\infty F_X(-z)dz\right)\left(\int_0^\infty (1-F_Y(w))dw\right) \\
&\quad + \left(\int_0^\infty F_X(-z)dz\right)\left(\int_0^\infty F_Y(-w)dw\right) \\
&\quad - \left(\int_0^\infty (1-F_X(z))dz\right)\left(\int_0^\infty F_Y(-w)dw\right) \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty ((1-F_X(z)-F_Y(w)+F_X(z)F_Y(w))-(F_X(-z)-F_X(-z)F_Y(w)) \\
&\quad + F_X(-z)F_Y(-w)-(F_Y(-w)-F_X(z)F_Y(-w)))\,dwdz
\end{aligned}$$

以上から,

$$
\begin{aligned}
Cov[X,Y] &= E[XY]-E[X]E[Y]=\int_0^\infty\int_0^\infty((F(z,w)-F_X(z)F_Y(w)) \\
&\quad +(F(-z,w)-F_X(-z)F_Y(w))+(F(-z,-w)-F_X(-z)F_Y(-w)) \\
&\quad -(F(z,-w)-F_X(z)F_Y(-w)))\,dwdz \\
&= \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty(F(z,w)-F_X(z)F_Y(w))dwdz
\end{aligned}
$$

注：X,Y が独立なら，被積分関数 $(F(z,w)-F_X(z)F_Y(w))$ は恒等的に 0 になり，積分値（共分散）も 0 になる．しかし，被積分関数が正負の値を取って変化する場合でも，積分値（共分散）が 0 になることはある．

A-3. 有限マルコフ連鎖の例

ある大学で進級／留年／飛級の確率は毎年変化せずに以下のように与えられているとする．１年次 (1st) で留年する確率が q_{11}，２年次 (2nd) に上がる確率が q_{12},，のように見る．

$$
\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i=1,2,3,4;j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ 0 & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ 0 & 0 & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} \end{pmatrix}
$$

つまり，行列 $\mathbf{Q}$ は，５つの状態（(1st), (2nd), (3rd), (4th), (other)）間の遷移確率を表わしている．(other) は，卒業／退学状態を表わし，各行において，(other) へ遷移する確率は，各行の確率の和を１から引いたものである．また，(other) から他の状態へは戻れない．また，最大在籍年数（８年）の制約はない．重要な性質は下の学年次に戻ることがない点である．

ある年に k 年次に居た学生が n 年後に在籍している年次を確率変数 $X_k^{(n)}$ で表す．

$$
\begin{aligned}
\pi_{k,j}^{(n)} &\overset{\text{def}}{=} P(X_k^{(n)}=j)=\sum_{i=1}^4 P(X_k^{(n)}=j, X_k^{(n-1)}=i) \\
&= \sum_{i=1}^4 P(X_k^{(n)}=j|X_k^{(n-1)}=i)P(X_k^{(n-1)}=i)=\sum_{i=1}^4 q_{ij}\pi_{k,i}^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{\pi}_k^{(n)} \overset{\text{def}}{=} (\pi_{k,1}^{(n)},\pi_{k,2}^{(n)},\pi_{k,3}^{(n)},\pi_{k,4}^{(n)})$ とおけば，$\boldsymbol{\pi}_1^{(0)}=(1,0,0,0), \boldsymbol{\pi}_2^{(0)}=(0,1,0,0),\ldots$ であり，

$$
\boldsymbol{\pi}_k^{(n)} = \boldsymbol{\pi}_k^{(n-1)}\mathbf{Q} = \boldsymbol{\pi}_k^{(0)}\mathbf{Q}^n = (\mathbf{Q}^n)_{i=k;j=1,2,3,4}
$$

＜１＞ １年次に入学した学生の在籍年数（大学に居る年数）の期待値を求めよ．

ある（１年次入学の）学生の在籍年数を確率変数 Z で表す.

$$E[Z]=\sum_{n=1}^{\infty}(1-P(Z\leq n-1))=\sum_{n=1}^{\infty}P(Z\geq n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}P(X_1^{(n-1)}=i)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{1,i}^{(n-1)}$$

※補分布を使わず, $P(Z=n)=P(Z\geq n)-P(Z\geq n+1)=\sum_{i=1}^{4}(\pi_{1,i}^{(n-1)}-\pi_{1,i}^{(n)})$ より，以下のように直接計算することも可能.

$$\begin{aligned}E[Z] &= \sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{i=1}^{4}(\pi_{1,i}^{(n-1)}-\pi_{1,i}^{(n)})=\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}n(\pi_{1,i}^{(n-1)}-\pi_{1,i}^{(n)})\\ &= \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{1,i}^{(n-1)}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_{1,i}^{(n-1)}-\sum_{n=1}^{\infty}n\pi_{1,i}^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{1,i}^{(n-1)}\end{aligned}$$

ここで, $\lim_{m\to\infty}\mathbf{Q^m}=\mathbf{O}$ を利用して，この無限級数が以下のように計算できる.

$$\boldsymbol{\pi}_1^{(n)}=(\pi_{1,1}^{(n)},\pi_{1,2}^{(n)},\pi_{1,3}^{(n)},\pi_{1,4}^{(n)})=\boldsymbol{\pi}_1^{(0)}\mathbf{Q}^n\quad \text{より}$$

$$\sum_{n=1}^{m}\boldsymbol{\pi}_1^{(n-1)}=\boldsymbol{\pi}_1^{(0)}\sum_{n=1}^{m}\mathbf{Q}^{n-1}=\boldsymbol{\pi}_1^{(0)}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^m)(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}=((\mathbf{I}-\mathbf{Q}^m)R)_{i=1;j=1,2,3,4}$$

ただし $\mathbf{I}$ は, 4×4 の単位行列, $\boldsymbol{\pi}_1^{(0)}=(1,0,0,0)$, $\mathbf{R}\overset{\text{def}}{=}(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}=(r_{ij})_{i=1,2,3,4;j=1,2,3,4}$ と置いた（実際はこの $\mathbf{R}$ を計算すべきであるが）. $m\to\infty$ すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\pi}_1^{(n-1)}=(r_{11},r_{12},r_{13},r_{14})$$

$$E[Z]=\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{1,i}^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{4}r_{1i}$$

この式の形から予想できるように, r_{ij} は,「i 年次へ入学・編入した学生が j 年次に滞在する年数の期待値」になる.

＜２＞ ２年次, ３年次, ４年次からの編入もあり，毎年入学者数／編入学者数は一定と仮定し，k 年次への入学・編入者数を, u_k 人（$k=1,2,3,4$）, とする. この時, **各学年次の「在籍人数」の期待値**（？）を求めよ.

求めるべき各年次の在籍人数の「期待値」は，厳密には「確率過程」としての検討が必要であるが，ここでは以下の解釈・仮定で進める．学年次間の遷移確率 $\mathbf{Q}$ と各学年次へ毎年入学・編入する学生数 (u_1,u_2,u_3,u_4) が時間と共に変らない（定常状態）場合は，どのような初期状態（＝各学年次の人数）から出発しても**十分長い時間が経った時点での，各学年次の「在籍人数の期待値」**はある値に収束する．ここではそれを求めることにする.

ある固定した年を考える．その年に k 年次に「入学・編入」した学生（u_k 人）のうちで n 年後に j 年次に在籍している人数を確率変数 $S_{k,j}^{(n)}$ で表す．

さらに，その年に k 年次に入学・編入した学生に番号 $l=1,2,\ldots,u_k$ を振り，番号 l の学生が n 年後に j 年次に居れば 1，そうでなければ 0 であるような確率変数 $V_{k,j,l}^{(n)}$ を考えると（$S_{k,j}^{(n)}$ が 2 項分布に従うことを使うならば V は不要だが､､､），

$$S_{k,j}^{(n)} = \sum_{l=1}^{u_k} V_{k,j,l}^{(n)} \quad \text{より} \quad E[S_{k,j}^{(n)}] = \sum_{l=1}^{u_k} E[V_{k,j,l}^{(n)}] = u_k P(X_k^{(n)} = j) = u_k \pi_{k,j}^{(n)}$$

そこで，ある年以降に入学・編入した学生だけを対象として，その年から n 年後に（その年に入学・編入した学生も含む）j 年次に在籍中の人数を確率変数 $S_j^{(n)}$ で表すと，

$$S_j^{(n)} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=1}^{4} S_{k,j}^{(m)} \quad \text{より} \quad E[S_j^{(n)}] = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=1}^{4} E[S_{k,j}^{(m)}] = \sum_{k=1}^{4} u_k \left(\sum_{m=0}^{n} \pi_{k,j}^{(m)} \right)$$

ここで，$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q^n} = \mathbf{O}$ を利用すると，十分長い時間が経った時点での各学年次の「在籍人数の期待値」$\lim_{n\to\infty} E[S_j^{(n)}]$ が，前問同様の流れで計算できる．

$$\boldsymbol{u} \stackrel{\text{def}}{=} (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

$$(E[S_1^{(n)}], E[S_2^{(n)}], E[S_3^{(n)}], E[S_4^{(n)}]) = \sum_{k=1}^{4} u_k \left(\sum_{m=0}^{n} \boldsymbol{\pi}_k^{(m)} \right) = \sum_{k=1}^{4} u_k \boldsymbol{\pi}_k^{(0)} \sum_{m=0}^{n} \mathbf{Q}^m$$

$$= \sum_{k=1}^{4} u_k ((\mathbf{I} - \mathbf{Q^{n-1}})\mathbf{R})_{i=k;j=1,2,3,4} = \boldsymbol{u}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{n-1})\mathbf{R}$$

よって，$\lim_{n\to\infty} E[S_j^{(n)}] = (\boldsymbol{u}\mathbf{R})_j = \sum_{k=1}^{4} u_k r_{kj}$

これは，定常状態（開学以来無限に時間が経った時点）での「j 年次に在籍する学生数の期待値」が，「$\sum_{k\le j}$（k 年次へ毎年入学・編入する学生数）×（k 年次へ入学・編入した学生が j 年次に滞在（在籍）する年数の期待値)」になることを示している．